

# Interacción háptica de alto desempeño con objetos virtuales dinámicos deformables

Omar A. Domínguez-Ramírez, Vicente Parra-Vega

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN  
Departamento de Ingeniería Eléctrica - Sección Mecatrónica  
Av. IPN #2508, San Pedro Zacatenco, México, D.F., CP.07300  
(omar, vparra)@mail.cinvestav.mx

**Resumen** En este trabajo se presenta al dispositivo háptico PHANToM 1.0, sus características electromecánicas y de programación, el modelo cinemático y dinámico, el método de generación de fuerza de reacción utilizado y un nuevo método que permite incrementar el realismo durante la interacción operador humano-ambiente virtual, considerando la dinámica no lineal de interacción. Se dan a conocer los experimentos y el estudio comparativo. El experimento consiste en la navegación aleatoria sobre la superficie de una esfera virtual.

## 1. Introducción

PHANToM 1.0 es un dispositivo electromecánico que permite la interacción un operador humano con un ambiente virtual. La háptica estudia la manera como articular el tacto con un mundo generado por una computadora. Uno de los problemas actuales de la realidad virtual es la limitación de estímulos por el sentido del tacto. La retroalimentación de fuerza o kinestética, es un campo de investigación de la háptica que trata con dispositivos que interactúan con músculos y tendones, y proporcionan al operador humano la sensación de que se aplica una fuerza. La retroalimentación táctil, trata con dispositivos que interactúan con los nervios terminales en la piel los cuales indican la presencia calor, presión y textura. El dispositivo háptico PHANToM 1.0 permite la retroalimentación táctil y kinestética. El método para generar la retroalimentación kinestética es el método de penalización, y consiste en asignar la propiedad de resorte (rigidez) a la superficie del objeto virtual en el punto de contacto (ley Hooke). Este método es utilizado en los dispositivos hápticos existentes debido a su fácil implementación, sin embargo, por no considerar la dinámica no lineal de interacción definida por la dinámica del dispositivo háptico, la dinámica objeto virtual y la participación del operador humano es considerada como una interfaz háptica pasiva, es decir, la retroalimentación de fuerza no representa dinámica de interacción del fenómeno real que se intenta representar. La programación de PHANToM 1.0, para generar aplicaciones, esta basada en una interfaz programable de aplicaciones llamada GHOST SDK, GHOST permite detectar el contacto entre el operador humano (representado en el ambiente virtual) y

objeto virtual, a partir de ello y de la deformación define la retroalimentación de fuerza, enviandola al operador humano para recrear la interacción. Sin embargo, y de manera implícita GHOST efectúa la conversión de fuerza a par, el par es definido con el conocimiento de la matriz jacobiana del dispositivo háptico, y posteriormente es enviado a los servomotores para recrear la fuerza de reacción en el efector final de PHANToM 1.0. Por esta razón se presenta en este trabajo el modelo cinemático de posición y diferencial, necesario para operar a PHANToM 1.0 en arquitectura abierta. En este trabajo proponemos un método nuevo e innovador, que garantiza el realismo de una interfaz háptica activa. Este método es denominado como Lagrangiano Restringido y consiste en definir la fuerza de reacción en función de la dinámica no lineal del dispositivo háptico, del modelo dinámico del objeto virtual definido con masa, amortiguamiento y rigidez, y de la participación del operador humano. Como este método requiere del conocimiento del modelo dinámico del dispositivo háptico, este es presentado, así como los parámetros dinámicos utilizados.

### 1.1. Planteamiento del problema

El problema a resolver gira en torno a la pregunta: ¿Cómo obtener una retroalimentación kinestética que garantice el realismo del fenómeno que se desea representar con la interacción operador humano-ambiente virtual?

Con el conocimiento del bajo desempeño del método de penalización (interfaz háptica pasiva) para generar la fuerza de reacción y que la interfaz de aplicación programable de GHOST SDK 3.1 de PHANToM 1.0 opera en arquitectura cerrada, se propone definir la fuerza de reacción considerando la dinámica restringida del dispositivo háptico y el modelo del objeto virtual que representa la superficie holónoma (ecuación algebraico-diferencial). Para operar al dispositivo háptico PHANToM 1.0 en arquitectura abierta, se requiere del conocimiento del modelo cinemático de posición y diferencial, situación que permitirá validar experimentalmente el algoritmo propuesto.

### 1.2. Solución propuesta

Para obtener el algoritmo que permita calcular la fuerza de reacción (Lagrangiano Restringido) que garantice una interacción realista entre el operador humano y el ambiente virtual, se plantea la siguiente solución:

- Obtener el modelo dinámico restringido del dispositivo háptico PHANToM 1.0.
- Identificar los parámetros dinámicos de PHANToM 1.0 mediante métodos de identificación en línea o aproximación basada en mediciones físicas.
- Definir un modelo dinámico de segundo orden que represente al objeto virtual de manera análoga a un sistema masa-resorte-amortiguador.

- Determinar el par de contacto (interacción de PHANToM con la superficie del objeto virtual).
- Resolver el multiplicador de Lagrange (fuerza de reacción) en términos del par de contacto.

Para operar al dispositivo háptico PHANToM 1.0 en arquitectura abierta, se propone la siguiente solución:

- Obtener el modelo cinemático directo e inverso de posición y velocidad del dispositivo háptico PHANToM 1.0.
- Definir un detector de contacto descrito por una función definida en términos del modelo cinemático directo de posición y de la ecuación del objeto virtual.
- Determinar la matriz transpuesta del jacobiano del dispositivo háptico PHANToM 1.0.
- Crear una clase que interactúe con GHOST SDK y que permita enviar los pares obtenidos a los servomotores del dispositivo háptico PHANToM 1.0.

### 1.3. Organización

En la sección II se presentan las características electromecánicas y de programación del dispositivo háptico PHANToM 1.0, así como recomendaciones de operación. En la sección III se define el modelo cinemático del dispositivo háptico PHANToM 1.0. En la sección IV se presenta la formulación de Euler-Lagrange que define la dinámica. En la sección V se presenta el modelo dinámico restringido de PHANToM 1.0 y el modelo del objeto virtual deformable, en esta sección se define el Lagrangiano Restringido. En la sección VI se consideran las condiciones y características del experimento así como las gráficas experimentales del método de penalización y del método del Lagrangiano Restringido, y el estudio comparativo entre estos dos. Y finalmente se concluye y se definen perspectivas de este trabajo.

## 2. PHANToM 1.0: Un dispositivo háptico de última generación

El dispositivo háptico PHANToM 1.0, es un dispositivo electromecánico que permite la inmersión virtual, y percibir durante la interacción, sensaciones kinestéticas y táctiles. Es un mecanismo de eslabones articulados de tres grados de libertad con articulaciones de revolución y cuyo efector final es un dedal que permite la interacción del operador humano. La posición nominal es de 0,03 mm, su espacio de configuraciones admisibles  $130 \times 180 \times 250$  (mm<sup>3</sup>), la fricción por

articulación es de  $0,04 N$  y la máxima fuerza aplicada por el operador humano es de  $8,5 N$ . PHANToM 1.0 requiere de un amplificador de potencia de  $10 A$  con voltajes de alimentación de  $120 V$  o  $220V$  a  $60 Hertz$  de frecuencia. En la Figura 1, se presenta la estación de trabajo PHANToM 1.0. El estímulo visual se efectúa

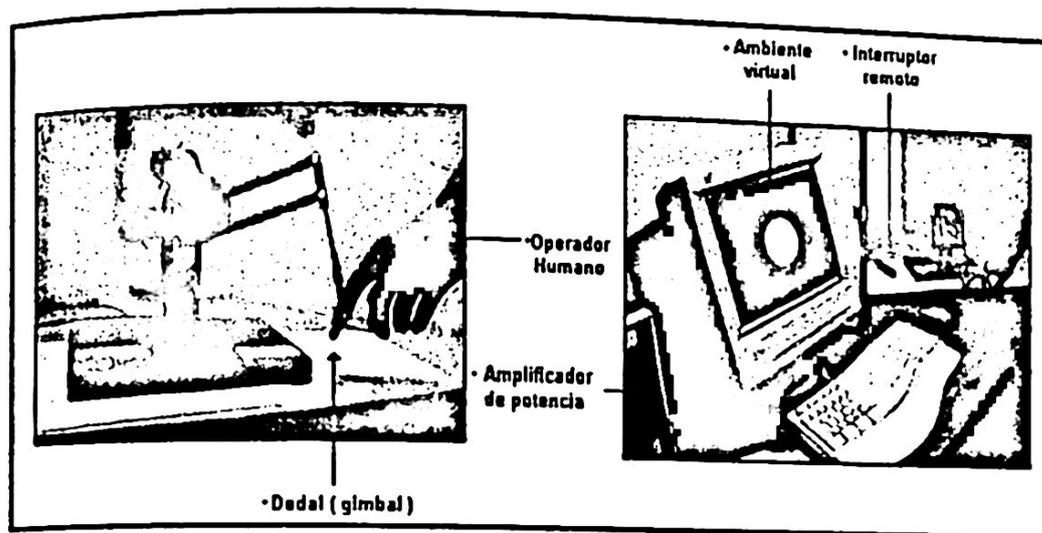


Fig. 1. Interfaz Háptica PHANToM 1.0 (Estación de trabajo)

mediante un ambiente virtual modelado con GHOST SDK 3.1. Esta interfaz de aplicaciones programable es compatible con Visual C++ 6,0 con sistema operativo Windows NT 4,0/SP6 o bien Windows 2000/SP2. Es recomendable una velocidad de procesamiento mayor a  $300 MHz$  y un espacio disponible de disco duro de  $500MB$ .

### 3. Modelo cinemático

En esta sección, se presenta el modelo cinemático directo e inverso de posición, así como el modelo cinemático directo e inverso de velocidad y aceleración (cinemática diferencial). Para ello se utilizó la metodología Denavit-Hartenberg. El modelo cinemático es utilizado de manera importante para operar a PHANToM en arquitectura abierta y para realizar tareas de entrenamiento remoto (guiado háptico). La cadena cinemática de PHANToM, representando los marcos ortonormales y articulaciones de revolución, de acuerdo a metodologías convencionales, es definida en la figura 2. Donde  $o_1, o_2$  y  $o_3$ , corresponden a los orígenes

de los marcos ortonormales en la segunda y tercera articulación,  $L_0$ ,  $L_1$  y  $L_2$  son las longitudes de los eslabones 1, 2 y 3. Los parámetros Denavit-Hartenberg, conforme a la cadena cinemática, están definidos en la tabla (1). El producto de

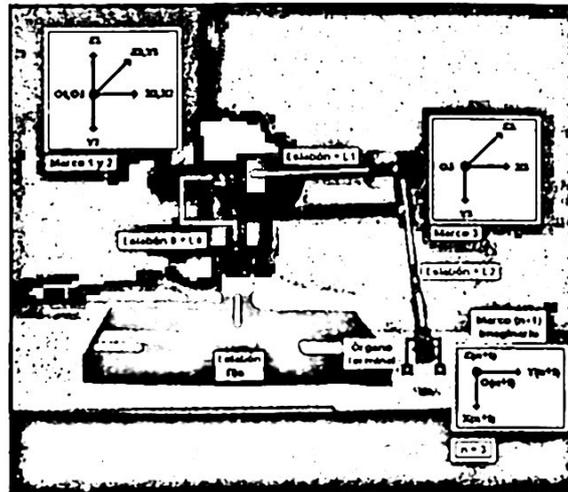


Fig. 2. Cadena Cinemática de PHANTOM 1.0

$i$	$\alpha$	$a$	$d$	$\theta$
1	$-\pi/2$	0	0	$\theta_1$
2	0	$L_2$	0	$\theta_2$
3	0	$L_3$	0	$\theta_3$

Cuadro1. Parámetros Denavit-Hartenberg de PHANTOM 1.0.

las tres matrices elementales derivadas de los parámetros Denavit-Hartenberg constituyen una matriz de transformación homogénea que permite definir la posición y orientación del órgano terminal respecto al marco ortonormal de referencia en la base del robot, y haciendo la transformación correspondiente al dedal. La matriz de transformación homogénea de PHANTOM 1.0 esta definida como,

$${}^1_4T = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1S_3 & C_3S_1 & S_1(L_1C_2 + L_2S_3) \\ 0 & C_3 & S_3 & L_2 - L_2C_3 + L_1S_2 \\ -S_1 & -C_1S_3 & C_1C_3 & -L_1 + C_1(L_1C_2 + L_2S_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Donde  $C_i = \cos(\theta_i)$  y  $S_i = \sin(\theta_i)$ . La matriz (1) define el modelo cinemático directo de posición, ecuaciones que permiten identificar las coordenadas opera-

cionales del extremo final de PHANToM (dedal), respecto al marco de referencia base (condición inicial de PHANToM 1.0, figura (3)).

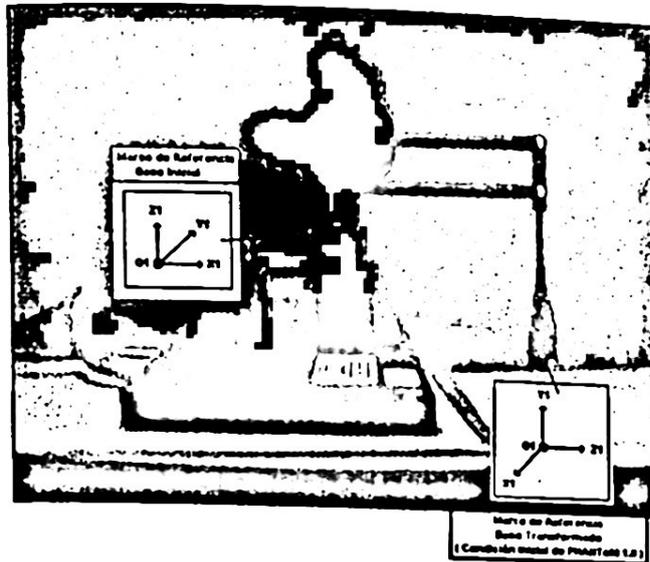


Fig. 3. Marco de Referencia Base y Condición Inicial de PHANToM 1.0

### 1. Modelo cinemático de posición

Las ecuaciones que definen el modelo cinemático directo de posición, se describen (2).

$$\begin{aligned} X &= S_1 (L_1 C_2 + L_2 S_3) \\ Y &= L_2 - L_2 C_3 + L_1 S_2 \\ Z &= -L_1 + C_1 (L_1 C_2 + L_2 S_3) \end{aligned} \quad (2)$$

modelo cinemático inverso de posición representa al conjunto de ecuaciones que permiten conocer las coordenadas generalizadas, con respecto a las coordenadas operacionales del extremo final de PHANToM (dedal). Para ésto, es necesario considerar que la posición de inicio de PHANToM que define el marco referencia base, donde  $\theta_1 = 0$  rad,  $\theta_2 = 0$  rad y  $\theta_3 = 0$  rad esta definido en la figura (3). Las ecuaciones estan definidas a continuación,

$$\theta_1 = a \tan 2 (x_1, z + L_1) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + (y - L_2)^2 + (z + L_1)^2} \\ d &= \sqrt{x^2 + (z + L_1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta &= a \tan 2(y - L_2, d) \\
L_2^2 &= L_1^2 + r^2 - 2L_1r \cos(\gamma) \\
\gamma &= \cos^{-1} \left( \frac{L_1^2 + r^2 - L_2^2}{2L_1r} \right) \\
\theta_2 &= \gamma + \beta
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
r^2 &= L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos(\alpha) \\
\alpha &= \cos^{-1} \left( \frac{L_1^2 + L_2^2 - r^2}{2L_1L_2} \right) \\
\alpha &= \frac{\pi}{2} - \theta_2 + \theta_3 \\
\theta_3 &= \alpha + \theta_2 - \frac{\pi}{2}
\end{aligned} \tag{5}$$

De esta manera se obtienen las coordenadas generalizadas  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  y  $\theta_3$ , en función de las coordenadas operacionales del dedal de PHANToM 1.0, representando al modelo cinemático inverso de posición.

### 3.2. Modelo cinemático de velocidad

El modelo cinemático directo de velocidad de PHANToM 1.0, está definido por  $\dot{x} = J\dot{\theta}$ , donde  $\dot{x}$  representa la velocidad operacional del extremo final de PHANToM,  $J$  representa la matriz Jacobiana y  $\dot{\theta}$  corresponde a la velocidad articular. De ésta manera  $J$  está definido por la siguiente expresión

$$J = \begin{bmatrix} L_1C_1C_2 + L_2S_3C_1 & -L_1S_1S_2 & L_2S_1C_3 \\ 0 & L_1C_2 & L_2S_3 \\ -(L_1S_1C_2 + L_2S_1S_3) & -L_1S_2C_1 & L_2C_1C_3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

El modelo cinemático directo de velocidad de PHANToM 1.0 a partir de (6), está definido por

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \{L_1C_1C_2 + L_2S_3C_1\} \dot{\theta}_1 - \{L_1S_1S_2\} \dot{\theta}_2 + \{L_2S_1C_3\} \dot{\theta}_3 \\
\dot{y} &= \{L_1C_2\} \dot{\theta}_2 + \{L_2S_3\} \dot{\theta}_3 \\
\dot{z} &= -\{L_1S_1C_2 + L_2S_1S_3\} \dot{\theta}_1 - \{L_1S_2C_1\} \dot{\theta}_2 + \{L_2C_1C_3\} \dot{\theta}_3
\end{aligned} \tag{7}$$

El modelo cinemático inverso de velocidad de PHANToM está definido por  $\dot{\theta} = J^{-1} \dot{x}$ , donde  $J^{-1}$  está definida por

$$J^{-1} = \frac{\text{adj}(J)}{\det(J)} \tag{8}$$

donde

$$\det(J) = L_1L_2 \{L_1S_2S_3C_2 + L_1C_2^2C_3 + L_2S_2 - L_2S_2C_3^2 + L_2S_3C_2C_3\} \tag{9}$$

Con la condición de que  $\theta_3 \neq \theta_2 + \frac{\pi}{2}$  para evitar que la matriz  $J$  sea singular,

$$\text{adj}(J) = \begin{bmatrix} L_1 L_2 C_1 C_{2-3} & 0 & -L_1 L_2 S_1 C_{2-3} \\ -L_2 S_1 S_3 K & L_2 C_3 K & -L_2 S_3 C_1 K \\ L_1 S_1 C_2 K & L_1 S_2 K & L_1 C_1 C_2 K \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde  $K = L_1 C_2 + L_2 S_3$ .

### 3.3. Modelo cinemático de aceleración

El modelo cinemático directo de aceleración define la aceleración operacional en el extremo final de PHANTOM, cuya expresión general es  $\ddot{x} = J\ddot{\theta} + \dot{J}\dot{\theta}$ , donde  $\ddot{\theta}$  representa la aceleración articular y  $J$  es la derivada temporal de la matriz jacobiana analítica, definida a continuación,

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} \dot{J}_{11} & \dot{J}_{12} & \dot{J}_{13} \\ \dot{J}_{21} & \dot{J}_{22} & \dot{J}_{23} \\ \dot{J}_{31} & \dot{J}_{32} & \dot{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \dot{J}_{11} &= -\{L_1 S_1 C_2 + L_2 S_1 S_3\} \dot{\theta}_1 - L_1 S_2 C_1 \dot{\theta}_2 + L_2 C_1 C_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{J}_{12} &= -L_1 S_2 C_1 \dot{\theta}_1 - L_1 S_1 C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{J}_{13} &= L_2 C_1 C_3 \dot{\theta}_1 - L_2 S_1 S_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{J}_{21} &= 0 \\ \dot{J}_{22} &= -L_1 S_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{J}_{23} &= L_2 C_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{J}_{31} &= -\{L_1 C_1 C_2 + L_2 S_3 C_1\} \dot{\theta}_1 + L_1 S_1 S_2 \dot{\theta}_2 - L_2 S_1 C_3 \dot{\theta}_3 \\ \dot{J}_{32} &= L_1 S_1 S_2 \dot{\theta}_1 - L_1 C_1 C_2 \dot{\theta}_2 \\ \dot{J}_{33} &= -L_2 S_1 C_3 \dot{\theta}_1 - L_2 S_3 C_1 \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

El modelo cinemático inverso de aceleración, es el conjunto de ecuaciones que permite conocer la aceleración articular en términos de la aceleración operacional y de la velocidad articular, definida como:  $\ddot{\theta} = J^{-1} \{ \ddot{x} - \dot{J}\dot{\theta} \}$ .

## 4. Modelo dinámico

El modelo dinámico de un robot manipulador, se puede obtener a partir de las leyes de la mecánica newtoniana y lagrangiana. Existen diversos métodos convencionales como Euler-Lagrange ( E-L ) y Newton-Euler ( N-E ). El uso del método E-L, para la obtención del modelo dinámico es simple y sistemático, proporciona las ecuaciones de estado en forma explícita y estas pueden ser utilizadas para analizar y diseñar estrategias de control. Las ecuaciones de movimiento de E-L son

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} L - \frac{\partial}{\partial \theta_i} L = \tau_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (12)$$

donde el Lagrangiano es

$$L = \sum_{i=1}^n (K_i - P_i) \quad (13)$$

con  $K_i$  es la energía cinética del  $i$ -ésimo eslabón,  $P_i$  es la energía potencial del  $i$ -ésimo eslabón,  $\theta_i$  es la  $i$ -ésima coordenada generalizada o variable articular,  $\dot{\theta}_i$  es la primera derivada respecto al tiempo de la coordenada generalizada  $\theta_i$  y  $\tau_i$  corresponde a la fuerza generalizada aplicada a la articulación  $i$  para mover el eslabón  $i$ . Utilizando (12) se obtiene la representación del modelo dinámico

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau \quad (14)$$

dado que  $n = 3$ , se tiene que (14) se expresa como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & m_{23} \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & 0 & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

donde los elementos de la matriz de inercias son

$$\begin{aligned} m_{11} &= \{ (0,5L_1^2 + 0,125L_2^2) m_a + (0,125L_1^2 + 0,5L_3^2) m_c \} + \\ &\quad 0,125L_1^2 (4m_a + m_c) \text{Cos}(2\theta_2) + m'_{11} \\ m'_{11} &= -0,125 (L_2^2 m_a + 4L_3^2 m_c) \text{Cos}(2\theta_3) + \\ &\quad 0,125L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Cos}(\theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \\ m_{22} &= L_1^2 (m_a + 0,25m_c) \\ m_{23} &= -0,5L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Sen}(\theta_2 - \theta_3) \\ m_{32} &= m_{23} \\ m_{33} &= 0,25L_2^2 m_a + L_3^2 m_c \end{aligned}$$

Los elementos de la matriz de fuerzas de Coriolis son

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0,125 \left\{ -2\text{Sen}(\theta_2) \left[ L_1^2 (4m_a + m_c) \text{Cos}(\theta_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. 2L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Sen}(\theta_3) \right] \dot{\theta}_2 \right\} + c'_{11} \\ c'_{11} &= 0,25\text{Cos}(\theta_3) \{ 2L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Cos}(\theta_2) \\ &\quad + (L_2^2 m_a + 4L_3^2 m_c) \text{Sen}(\theta_3) \} \dot{\theta}_3 \\ c_{12} &= -0,125 \{ L_1^2 (4m_a + m_c) \text{Sen}(2\theta_2) + \\ &\quad 4L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Sen}(\theta_2) \text{Sen}(\theta_3) \} \dot{\theta}_1 \\ c_{13} &= -0,125 \{ -4L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Cos}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_3) - \\ &\quad (L_2^2 m_a + 4L_3^2 m_c) \text{Sen}(2\theta_3) \} \dot{\theta}_1 \\ c_{21} &= -c_{12} \\ c_{23} &= 0,5L_1 (L_2 m_a + L_3 m_c) \text{Cos}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_3 \end{aligned}$$

$$c_{31} = -c_{13}$$

$$c_{32} = 0,5L_1 (L_2m_a + L_3m_c) \text{Cos}(\theta_2 - \theta_3) \dot{\theta}_2$$

Los elementos del vector de fuerzas gravitacionales son

$$g_1 = 0$$

$$g_2 = g \{L_1 (m_a + 0,5m_c) + L_5m_{be}\} \text{Cos}(\theta_2)$$

$$g_3 = g \{0,5L_2m_a + L_3m_c - L_6m_{df}\} \text{Sen}(\theta_3)$$

fácil verificar que la matriz de inercia es simétrica  $M(q) = M(q)^T$  y definitivamente  $\det \{M(q)\} > 0$ , además que se cumple la propiedad de la matriz antisimétrica  $x^T (\dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})) x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ . Los parámetros aproximados del modelo dinámico que representan masas y longitudes de los eslabones elementos del dispositivo háptico PHANToM 1.0 son

Parámetro	Valor	Unidad
$m_a$	$17,5 \times 10^{-3}$	<i>Kg</i>
$m_c$	$10,4 \times 10^{-3}$	<i>Kg</i>
$m_{be}$	0,2214	<i>Kg</i>
$m_{df}$	0,1106	<i>Kg</i>
$L_1$	139,7	<i>mm</i>
$L_2$	139,7	<i>mm</i>
$L_3$	32,5	<i>mm</i>
$L_4$	36,8	<i>mm</i>
$L_5$	52,7	<i>mm</i>
$g$	9,81	$m/s^2$

Cuadro2. Parámetros del Modelo Dinámico de PHANToM 1.0.

### Dinámica restringida

PHANToM 1.0, al interactuar con el objeto virtual, la dinámica presenta restricción en su movimiento, definido por el siguiente sistema de ecuaciones algebraico-diferencial,

$$M(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) = \tau + \frac{J_\varphi^T}{\|J_\varphi J_\varphi^T\|} f_r \tag{16}$$

$$\varphi(q) = 0 \tag{17}$$

donde  $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  denota una matriz de inercia definida positiva y simétrica,  $C(q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  corresponde a la matriz de fuerzas de Coriolis y centripetas,  $g(q) \in \mathbb{R}^n$  modela el vector de fuerzas gravitacionales,  $\tau \in \mathbb{R}^n$  corresponde al vector de torque de entrada,  $f_r \in \mathbb{R}^r$  es, ( $r=1$  es un escalar que indica un punto de contacto) el Lagrangiano restringido y corresponde a la magnitud de la fuerza de contacto,  $\frac{J_\varphi^T}{\|J_\varphi J_\varphi^T\|}$  es la proyección normalizada del jacobiano restringido sobre la normal al plano tangente del punto de contacto  $\varphi(q) = 0$ ,  $J_\varphi \in \mathbb{R}^n$ ,  $J_\varphi = J_\varphi(q) = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \varphi(q) \quad \frac{\partial}{\partial q_2} \varphi(q) \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \varphi(q) \right]$ , y la superficie de contacto esta definida como  $\varphi(q) = 0$ . Con base en el modelo dinámico restringido, y en ausencia de un sensor de fuerza que permita sensar la fuerza de interacción de PHANToM con el objeto virtual, se propone definir la fuerza de reacción  $f_r$  que garantiza una interfaz háptica activa.

### 5.1. Interfaz háptica activa

Una interfaz háptica activa involucra el conocimiento de la fuerza de reacción mediante un sensor físico o virtual, y la dinámica no lineal de interacción. En esta sección se presenta la propuesta para implementar una interfaz háptica activa. La superficie de contacto del objeto virtual es considerada como la restricción cinemática de movimiento de PHANToM, cuyo modelo es

$$\varphi(X) = 0 \in \mathbb{R}^r \quad (18)$$

donde  $r = 1$  es el número de puntos de contacto con  $r < n$  y  $n = 3$  el número de grados de libertad de PHANToM. Del modelo cinemático directo de posición  $X = f(q)$  se tiene que  $\varphi(f(q)) = 0 \in \mathbb{R}^r$ , donde  $q \in \mathbb{R}^n$  corresponde a las coordenadas generalizadas de PHANToM, por consiguiente es posible formular el ambiente virtual de restricción como

$$\varphi(q) = 0 \quad (19)$$

A partir de esto, se propone definir la fuerza de reacción  $f_r$  mediante la metodología del lagrangiano restringido, es decir

$$\tau_r = \frac{J_\varphi^T}{\|J_\varphi J_\varphi^T\|} f_r \quad (20)$$

donde  $J_\varphi = \nabla_q \varphi(q) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  representa la matriz jacobiana en el espacio de la tarea, definida por  $J_\varphi = J_\varphi(q) = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \varphi(q) \quad \frac{\partial}{\partial q_2} \varphi(q) \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \varphi(q) \right]$ , y  $f_r$  corresponde al lagrangiano restringido que define la fuerza de contacto de PHANToM y la restricción cinemática definida por el objeto virtual. El modelo dinámico queda

representado por el sistema siguiente

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + \tau_r \quad (21)$$

$$\varphi(q) = 0 \in \mathbb{R}^r \quad (22)$$

Las derivadas temporales de la restricción, están definidas como

$$\dot{\varphi}(q) = J_\varphi \dot{q} \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (23)$$

$$\ddot{\varphi}(q) = J_\varphi \ddot{q} + \dot{J}_\varphi \dot{q} \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (24)$$

Se propone un estabilizador de la restricción, normalizado a un sistema masa-resorte-amortiguador

$$\ddot{\varphi}(q) \stackrel{\Delta}{=} -k_v \dot{\varphi}(q) - k_p \varphi(q) \quad (25)$$

donde las ganancias proporcional ( $k_p$ ) y derivativa ( $k_v$ ) dependen de la inercia  $m$ , la flexibilidad  $b$  y la elasticidad  $k$

$$k_p = k/m \quad k_v = b/m$$

de (23), se obtiene

$$\ddot{\varphi}(q) + b/m \cdot \dot{\varphi}(q) + k/m \cdot \varphi(q) = 0 \quad (26)$$

Despejando la aceleración articular  $\ddot{q}$  en (21) y sustituyendo (20)

$$\ddot{q} = M(q)^{-1} \left\{ -C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + \tau + \frac{J_\varphi^T}{\|J_\varphi J_\varphi^T\|} f_r \right\} \quad (27)$$

En lazo cerrado con el estabilizador de la restricción (23) y (25) se tiene

$$J_\varphi M(q)^{-1} \left\{ -C(q, \dot{q})\dot{q} - G(q) + \tau + \frac{J_\varphi^T}{\|J_\varphi J_\varphi^T\|} f_r \right\} + \dot{J}_\varphi \dot{q} = \ddot{\varphi}(q) \quad (28)$$

despejando el lagrangiano  $f_r$  de (28), resulta

$$f_r = \frac{\|J_\varphi J_\varphi^T\|}{J_\varphi M(q)^{-1} J_\varphi^T} \left\{ \ddot{\varphi}(q) - \dot{J}_\varphi \dot{q} + J_\varphi H(q)^{-1} [C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) - \tau] \right\} \quad (29)$$

Considerando el control que estabiliza la restricción (25), finalmente tenemos que

$$f_r = \frac{\|J_\varphi J_\varphi^T\|}{J_\varphi M(q)^{-1} J_\varphi^T} \left\{ -kp \cdot \varphi(q) - kv \cdot \dot{\varphi}(q) - \dot{J}_\varphi \dot{q} + J_\varphi H(q)^{-1} [C(q, \dot{q}) \dot{q} + G(q) - \tau] \right\} \quad (30)$$

La expresión (30), representa la fuerza de reacción en términos de la dinámica de PHANTOM 1.0, en función de las propiedades dinámicas de inercia, rigidez y amortiguamiento del objeto virtual y un controlador  $\tau$ .

## 6. Desempeño experimental en movimiento restringido

En esta sección se presentan los experimentos en arquitectura abierta de una interfaz háptica pasiva considerando las propiedades de rigidez y amortiguamiento para el cálculo de la fuerza de contacto. También son presentados los experimentos de una interfaz háptica activa empleando el algoritmo propuesto del Lagrangiano restringido (30) validando la conveniencia de su uso mediante el estudio comparativo con el método de penalización.

### 6.1. Modelo matemático de los objetos virtuales y detección de la colisión

El modelo cinemático de la restricción (superficie de contacto), con base en (18), del plano virtual paralelo a X-Z es

$$\varphi(x) = Y - y_0 \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (31)$$

$$x = f(q) \quad (32)$$

$$\varphi(f(q)) = \varphi(q) \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (33)$$

$$\varphi(q) = l_2 - l_2 C_3 + l_1 S_2 - y_0 \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (34)$$

donde  $f(q)$  corresponde al modelo cinemático directo de posición.  $J_\varphi(q)$  y  $u$  son empleados para dar dirección a la fuerza de reacción  $f_r$  calculada por cualquier método, y se presentan a continuación,

$$J_\varphi(q) = \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \varphi(q) \quad \frac{\partial}{\partial q_2} \varphi(q) \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \varphi(q) \right] \quad (35)$$

$$= [0 \quad l_1 C_2 \quad l_2 S_3] \quad (36)$$

$$u = \frac{J_\varphi(q)}{\sqrt{J_\varphi(q) J_\varphi^T(q)}} \quad (37)$$

Utilizando (18), el modelo cinemático de la restricción (superficie de contacto), que define a la esfera virtual es:

$$\varphi(x) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 \stackrel{\Delta}{=} r^2 \quad (38)$$

$$\varphi(x) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - r^2 \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (39)$$

$$x = f(q) \quad (40)$$

$$\varphi(f(q)) = \varphi(q) \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (41)$$

$$\varphi(q) = \varphi(q)_1 + \varphi(q)_2 + \varphi(q)_3 \stackrel{\Delta}{=} 0 \quad (42)$$

$$\begin{aligned} q_1 &= 2l_1^2(1 - C_1C_2) + 2l_2^2(1 - C_3) + 2l_1l_2(S_2 - S_3C_1 - S_{2-3} + S_1^2S_3C_2) \\ q_2 &= 2l_1\{\gamma(1 - C_1C_2) - \alpha S_1C_2 - \beta S_2\} + 2l_2\{\beta(C_3 - 1) - (\alpha S_1 + \gamma C_1)S_3\} \\ q_3 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2 \end{aligned}$$

donde  $c(\alpha, \beta, \gamma)$  representa el centro de la esfera y,  $r$  su radio. Las ecuaciones (39) y (38) son empleadas como detector de la colisión en arquitectura abierta de manera importante en la obtención de la fuerza de reacción con base en el método propuesto del Lagrangiano restringido. Con tolerancia de acercamiento  $< |\xi|$  con  $\xi = 1 \times 10^{-6} \text{ m}$

## 6.2. Experimentos de fuerza de reacción basado en el lagrangiano restringido

Con  $K = 200 \text{ N/m}$ ,  $b = 100 \text{ Nseg/m}$  y  $M = 12,5 \text{ Kg}$ , el comportamiento sobre superficie de contacto es estable con frecuencia de 0 Hz. Se logra deformación del objeto de manera adecuada, ver figuras (4) y (5). Con  $K = 2000 \text{ N/m}$ ,  $b = 100 \text{ Nseg/m}$  y  $M = 1,25 \text{ Kg}$ , el comportamiento sobre la superficie de contacto es estable con frecuencia de 2.3 Hz. La deformación es nula en el objeto, ver figuras (6) y (7). Con  $K = 500 \text{ N/m}$ ,  $b = 100 \text{ Nseg/m}$  y  $M = 1,25 \text{ Kg}$ , el comportamiento sobre la superficie de contacto es estable con frecuencia de 0 Hz. Se logra deformación controlada y estable en el objeto virtual, ver figuras (8) y (9). En la tabla siguiente se presentan los comentarios del estudio comparativo entre las metodologías de fuerza de reacción por penalización, rigidez y amortiguamiento simultáneos y Lagrangiano restringido, los beneficios del método propuesto se basan en un control sobre la superficie de contacto, dada la baja frecuencia que el operador induce por la reacción de la superficie de contacto, como deformación controlable por el operador humano.

## Conclusiones y perspectivas

este trabajo es posible apreciar el beneficio de implementar el método del Lagrangiano Restringido para asignar realismo a la interacción operador humano-

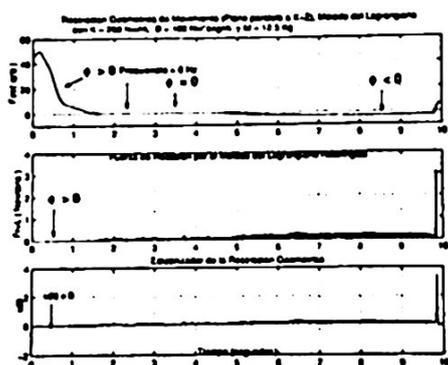


Fig. 4. Lagrangiano Restringido en una pared virtual, con  $K = 200 \text{ N/m}$ ,  $b = 100 \text{ Nseg/m}$  y  $M = 12,5 \text{ Kg}$

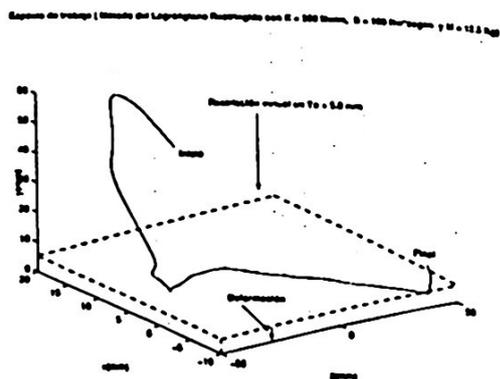


Fig. 5. Lagrangiano Restringido en una pared virtual

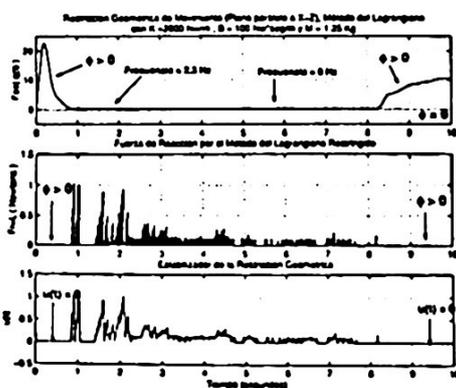


Fig. 6. Lagrangiano Restringido en una pared virtual, con  $K = 2000 \text{ N/m}$ ,  $b = 100 \text{ Nseg/m}$  y  $M = 1,25 \text{ Kg}$

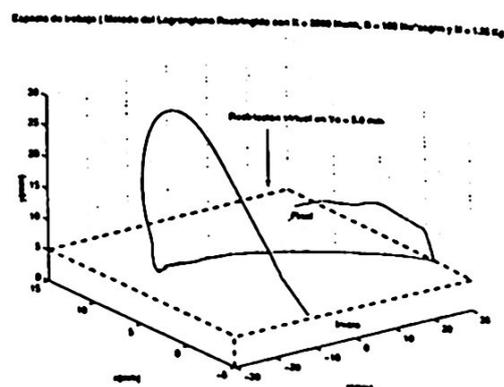


Fig. 7. Lagrangiano Restringido en una pared virtual

ambiente virtual, debido a que esta considerando la dinámica no lineal que representa al sistema. Los métodos pasivos de penalización y de amortiguamiento rigidez simultáneos no permiten la percepción de las propiedades dinámicas del objeto virtual bajo condiciones de deformación, situación apreciable en el método propuesto. Esta metodología es posible de aplicarse en entrenamiento remoto o guiado háptico libre y restringido, en telepresencia realista y cirugía de mínima invasión.

## Referencias

1. G.C. Burdea, "Force and Touch Feedback for Virtual Reality", John Wiley and Sons, Inc., Electrical and Computer Engineering Department, The State University of New Jersey, 1996.

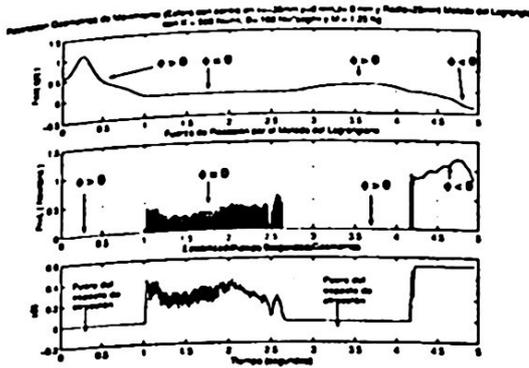


Fig. 8. Lagrangiano Restringido en una esfera virtual, con  $K = 500 \text{ N/m}$ ,  $b = 100 \text{ Nseg/m}$  y  $M = 1,25 \text{ Kg}$

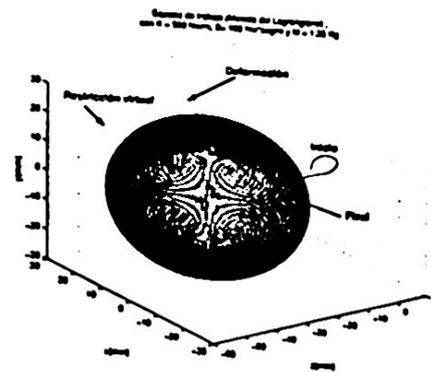


Fig. 9. Lagrangiano Restringido en una esfera virtual

2. M.A. Srinivasan, "Haptics Research at the MIT Touch Lab", The First Phantom user's Group Workshop, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, pp. 10-13, 1996.
  3. K. Salisbury, "An Overview of Haptics Research at MIT's AI Lab", The First Phantom user's Group Workshop, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, pp. 6-9, 1996.
  4. Salisbury, J.K. and Mandayam A. Srinivasan. "Phantom-Based Haptic Interaction with Virtual Objects", IEEE Computer Graphics and Applications; Volume 17, Number 5, pp. 6-10; September-October 1997.
  5. SensAble Technologies, Inc., "GHOST SDK Version 3.1: Programmer's Guide", Rev.1.31/3/00.
  6. SensAble Technologies, Inc., "GHOST SDK Version 3.1: API Reference", Rev.1.31/3/00.
  7. M. Moreyra, B. Hannaford, "A Practical Measure of Dynamic Response of Haptic Devices", International Conference on Robotics and Automation, Proceedings of the 1998 IEEE, pp. 369-374, Leuven Belgium, 1998.
  8. T. Yoshikawa, A. Nagura, "Development and Control of Touch and Force Display Device for Haptic Interface", IFAC, pp. 127-132, 2000.
  9. V. Parra-Vega, "Telepresence with Master-Slave Robots using a Nonlinear Formulation without Time Delay", Mechatronics Division, CINVESTAV, México.
- S. Arimoto, Yun-Hui Liu, V. Parra-Vega, "Design of Model-Based Adaptive Controllers for Robot Manipulators Under Geometric Constraints", The American Society of Mechanical Engineers, Proceedings of the Japan U.S.A., Symposium on Flexible Automation, Book No. I0338A-1992.
- Omar A. Domínguez-Ramírez, Vicente Parra-Vega, "Constrained Lagrangian-Based Force-Position Control Haptic Guidance", EuroHaptics 2003, Dublin, Ireland, 2003.
- Omar A. Domínguez-Ramírez, Vicente Parra-Vega, "Active Haptic Interface with Purposes of Remote Training", The 11th International Conference on Advanced Robotics, University of Coimbra, Portugal, 2003.
- Omar A. Domínguez-Ramírez, Vicente Parra-Vega, "Texture, Roughness, and Shape Haptic Perception of Deformable Virtual Objects with Constrained La-

Objeto virtual Método	Plano virtual		Esfera virtual	
	K=200 N/m	K=2000 N/m	K=500 N/m	K=2000 N/m
Método de Penalización	Inestable en SC DSC no controlada	Estabilidad en SC (Fsc = 14.28 Hz) DSC = 0	Inestable SC (11.11Hz < Fsc < 500Hz) DSC no controlada	Inestabilidad en SC (900Hz < Fsc < 1KHz) DSC = 0
Método de Rigidez y Amortiguamiento Simultáneos	K=200 N/m B=100 Ns/m	K=2000 N/m B=100 Ns/m	K=500 N/m B=100 Ns/m	K=2000 N/m B=100 Ns/m
	Baja estabilidad en SC. Fsc = 7.14Hz DSC = controlada	Estabilidad en SC Fsc = 11.11 Hz DSC = 0	Estabilidad en SC Fsc = 8.4 Hz DSC = controlada	Estabilidad en SC (50Hz < Fsc < 300Hz) DSC = 0
Método del Lagrangiano Restringido	K=200 N/m B=100 Ns/m M=12.5 Kg	K=200 N/m B=100 Ns/m M=1.25 Kg	K=500 N/m B=100 Ns/m M=1.25 Kg	K=2000 N/m B=100 Ns/m M=1.25 Kg
	Estabilidad en SC Fsc = 0 Hz DSC = controlada (condición óptima)	Estabilidad en SC Fsc = 2.3 Hz DSC = baja	Estabilidad en SC Fsc = 0 Hz DSC = controlada (condición óptima)	Estabilidad en SC Fsc = 22.2 Hz DSC = baja

SC: Superficie de Contacto  
 Fsc: Frecuencia sobre la superficie de contacto  
 DSC: Deformación de la superficie de contacto

Fig. 10. Tabla comparativa de métodos para generar fuerza de reacción

*grangian Formulation*", The 2003 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS 2003), Las Vegas, USA, 2003.